ISSN 1986–518X ISTRAŽIVANJE MATEMATIČKOG OBRAZOVANJA

Vol. II (2010), Broj 3, 33 –45
Originalni istraživački rad

JEDNO UTVRĐIVANJE GEOMETRIJSKIH KOMPETENCIJA STUDENATA STUDIJSKOG PROGRAMA ZA OBRAZOVANJE UČITELJA[1]

Daniel A. Romano[2], Vladan Todić[3] i Milovan Vinčić[4]

Sažetak: U radu je prezentovana procjena geometrijskih kompetencija studenata učiteljskog programa na Pedagoškom fakultetu u Bijeljini. Analiza je bazirana na geometrijskoj paradigmi i nivoima argumentacije. Čak iako je fokusirana na djelimičnu populaciju, ova studija može biti podsticaj za procjenu uspješnosti podučavanja u geometriji budućih učitelja.

Ključne riječi i fraze: Procjena uspješnosti**,** procjena i mjerenje znanja, vještina i sposobnosti, ciljevi matematičkog obrazovanja**,** geometrijske kompetencije

Abstract: We present an evaluation of geometrical competition of elementary schoolteacher students at the Bijeljina faculty of Education. The analysis is based on the notion of geometrical paradigms and levels of argumentation. Even if it is focused on a particular population, this study can be used to evaluate the long-term effects of education in geometry.

ZDM: C70, D30, D60, G10,
Key words and phrases: Evaluation of instruction, Goals of mathematics teaching, Control and measurement of knowledge, abilities and skills; Comprehensive works on geometry and the teaching of geometry

Uvod

U teoriji i praksi mnogi predavači univerzitetskih kurseva 'Metodika nastave matematike' koriste van Hieleovu teoriju kao sredstvo za olakšavanje razumijevanja geometrijskog mišljenja. O van Hieleovoj teoriji razumijevanja geometrije pogledati, na primjer, članke [5] i [20]. Glavni cilj je poboljšavanje studentske (budućih nastavnika) didaktičke svijesti o alatima geometrijskog mišljenja (o geometrijskom mišljenju pogledati, na primjer, članke [4], [10], [11], [12], [13], [16], [17], [18], [21] i [24]) kao i ovladavanje tehnikama procjena učeničke uspješnosti u razumijevanju osnovnih geometrijskih ideja. Dakle, studenti studijskog programa za obrazovanje profesora razrednje nastave (učitelji) trebalo bi da su osposobljeni da prepoznaju karakterizaciju nivoa razumjevanja tih osnovnih ideja u prelazu iz percepcije elementarnih figura i tijela preko uočavanja osnovnih elemenata (i njihovih međusobnih veza) tih objekata ka formiranju definicija tih objekata. U okvirima kursa 'Metodika nastave matematike' izvršeno je procjenjivanje matematičkih kompetencija studenata studijskog programa za obrazovanje učitelja (o procjenjivanju matemaičkih kompetencija budućih učitelja pogledati, na primjer, članak [22]). Zadatak broj 2 u tom intervjuu omogućava nastavniku da ustanovi dosegnuti nivo studentske kompetentnosti da,

[1] Rad je dio šireg istraživačkog projekta „Ustanovljavanje obrazovnih nivoa u matematici" koji realizuje Naučno društvo matematičara Banja Luka

[2] Pedagoški fakultet Bijeljina, Univerzitet u Istočnom Sarajevu, 76300 Bijeljina, Semberskih ratara bb, Bosna i Hercegovina, e-mail: bato49@hotmail.com
[3] Pedagoški fakultet Bijeljina, Univerzitet u Istočnom Sarajevu, 76300 Bijeljina, Semberskih ratara bb, Bosna i Hercegovina, e-mail:
[4] Mašinski fakultet, Univerziteta u Banjoj Luci, 78000 Banja Luka, Vojvode Stepe Stepanovića 75, Bosna i Hercegovina, e-mail: vincicm@yahoo.com.

eksponirajući alate induktivnog i analitičkog mišljenja, dolaze do prihvaljivih deskripcija (tzv. skoro-definicija) tih geometrijskih objekata. Na primjeru međusobnih odnosa osnovnih geometrijskih pojmova i razumijevanja tih odnosa, studenti eksponiraju svoje poimanje tih fundamentalnih geometrijskih objekata. To su minimalna znanja, razumijevanja i sposobnosti vezani za ove osnovne geometrijske pojmove kojima bi trebalo da budući učitelji vladaju.

Neka opšta pitanja pojavljuju se prirodno[5]:

Pitanje 1. *Po čemu se razlikuju ciljevi nastave geometrije u drugom razredu od ciljeva u trećem razredu?*

Pitanje 2. *Po čemu bi trebalo da se razlikuju aktivnosti nastavnika pri predavanju geometrijskih sadržaja u drugom razredu, u metodološkom smislu, od aktivnosti nastavnika koji predaje geometriju u trećem razredu?*

Pitanje 3. *Koliko ta razlika utiče na nastavnička uvjerenja? I obrnuto: Koliko nastavničko uvjerenje utiče na tu razliku?*

Pitanje 4. *U kojoj mjeri van Hieleova teorija razumijevanja geometrije može pomoći realizatorima nastave matematike u njihovim najstiojanjima da naprave distinkciju između svojih aktivnosti u realizaciji geometrijskih sadržaja u različitim (nižim) razredima osnovne škole*?

U ovom članku, uz uvažavanje savremenih saznanja o istraživanjima matematičkog obrazovanja (u vezi sa prethodnim pogledati, na primjer članak [19] i/ili knjige [3], [7], [23]), prezentirana je jedna od mogućnosti utvrđivanja geometrijskih, geometrijsko-metodičkih kompetencija studenata razredne nastave kao i njihove kompetencije u domeni 'sagledavanja problematike geometrijskog obrazovanja'.

Bazna intencija ovog istraživanja je prepoznavanje oblika reagovanja studenata u situaciji kada se susretnu sa potrebom da (bar malo) preciznije opišu osnovne elemenata geometrije i njihove međusobne odnosa. Šta iz njihovih reakcija na ovaj intervju možemo naučiti o njihovim znanjima i razumjevanjima koncepata iz geometrije? Od ranih 80-ih godina autori brojnih studija u mnogim zemljama procjenjivali su da nastavnička znanja, vještine i sposobnosti treba da budu na znatno višem nivou od nivoa koji podučavaju svoje učenike (U smislu, da ako nastavnik podučava učenike do nivoa 1, njegova znanja bi trebalo da budu minimalno na nivou 2). Međutim, kada su u pitanju geometrijska znanja, učiteljske kompetencije su na nedovoljno visokom nivou (Hershkowitz i Vinner 1984; Niss 1988). Ovo istraistraživanje može poslužiti kao podloga za formiranje slutnje o vrlo skromnim kompetencijama studenata studijskog programa za obrazovanje profesora razredne nastave na Pedagoškom fakultetu u Bijeljini[6]. Naime, 61% studenata ove populacije nije ponudilo gotovo nikakve odgovore na bilo koje pitanje ovog zadatka. Aritmetička sredina uspješnosti ove populacije u rješavanju pitanja ovog zadatka iznosi skromnih 4.90 od mogućih 25 bodova (dakle, 19.6%). Broj studenata koji nisu ponudili nikakav odgovor ili su ponudili pogrešan odgovor na pojedina pitanja o elementarnim odnosima osnovnih geometrijskih pojmova je zabrinjavajuće visok (sa ∅ je označeno da nije ponuđen nikakav odgovor, a sa 0 da je ponuđen pogrešan odgovor):

Pitanje	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
∅	47	57	48	39	41	61	53	45	51	51
0	5	12	10	5	10	8	11	2	5	8
Ukupno	52	69	58	44	51	69	64	47	56	59
%	67.53	89.61	75.32	57.14	66.23	89.61	83.12	61.04	72.73	76.62

[5] Analizirajući udžbenike matematike (obavezne u Republici Srpskoj, B&H) u nižim razredima osnovne škole autori ovog teksta ni na koji način, nažalost, nisu mogli da ustanove da li resorno ministarstvo vodi računa da, u cilju realizacije matematičkih sadržaja u tim razredima, pomogne edukatorima tih sadržaja na na savremen, dakle u skladu sa nekom od dominantnih teorija matematičkog obrazovanja, prenoseći elementarne matematičke ideje svojim učenicima stvaraju odgovarajuće fundamentalne situacije, posredstvom dizajniranih dokumenata, u kojima bi se konstruisalo planirano neophodno znanje i kod učenika razvile sposobnosti i vještine matematičko-logičkog (skupovno-relacijskog, aritmetičkog, rano-algebarskog i prostorno-geometrijskog) mišljenja.

[6] Vrlo jer nazahvalo praviti procjene o geometrijskim kompetencijama studenata na nekim studijskim programa za obrazovanje učitelja u RS-u zbog nepostojanja dobre volje za saradnju kako kod resornih ministarstva i menadžmenta univerziteta tako i kod realizatora univerzitetskih kurseva 'Matodika nastave matematike'.

Slijedeće pitanje je izraz snažne zabrinutosti autora ovog teksta: "*Kako će budući učitelji prenoseći geometrijske ideje učenicima nižih razreda osnovne škole podsticati razvoj prostornog i geometrijskog mišljenja do nivoa 1 kod svojih učenika ako nivo razumjevanja tih ideja kod učitelja ne prevazilazi nivo 1 (po van Hieleovoj klasifikaciji)*?"

Beckground

Prostorni smisao se, prema Freudentalu, može opisati kao sposobnost da se shvati vanjski svijet. Po mišljenju nekih drugih istraživača matematičkog obrazovanja ovaj prostorni smisao se sastoji od tri glavne komponente koje su najbitnije za osposobljavanje mladih da „shvate svijet" ali i za razvoj matematičkog promišljanja: prostorne vizuelizacije, geometrija i prostorne orijetacije. Ove komponente se mogu prepoznati već u temeljima nastavnih programa matematike za više razrede osnovne škole.

Prostorna vizuelizacija uključuje sposobnost zamisli kretanja objekata i prostornih oblika. U ove aktivnosti uključuju se i sposobnost mentalnih premještanja geometrijskih reprezentacija (Bishop, 1980; Clements, 2004). To je, prema nekim drugim istraživačima (Zacks, Mires, Tversky, Hazeltzine, 2000) sposobnost da se 'napravi' objekat baziran na transformaciji. Nedavna istraživanja unutar kognitivne nauke (Huttenlocher, Newcombe and Sandberg, 1994) pokazala su kako mala djeca (16-24 mjeseca stara djeca) mogu koristiti koncept udaljenosti da lokalizuju objekte. Takva sposobnost prostorne vizuelizacije zahtjeva vještinu mentalne slike o lokaciji objekta.

Trebalo bi da nastavnici podučavajući geometriju u nižim razredima osnovne škole, podučavaju svoje učenike o oblicima, figurama i tijelima što bi trebalo da im omogućava da razviju osjećaj za prihvatanje poznatih struktura te razumijevanje karakterističnih elemenata i objekata tih struktura. Ova vrsta komunikacije trebalo bi da bude realizovana posredstvom fundamentalnih situacija unutar kojih se kod učenika obogaćuje vokabular, snaži imaginacija te podstiče razvoj geometrijskog i prostornog mišljenja[7].

Treća komponenta koju smo pomenuli je 'prostorna orijentacija'. To je termin koji Clements (Clements, 2004) koristi da opiše kako napraviti 'naš put' u prostoru. Djeca, istražujući svoje okruženje, stiču iskustva koja će im pomoći shvatiti relevantno pozicioniranje te veličine oblika i likova (van den Heuvel, Panhuizen and Buys, 2005). Djeca uče kako se orijentisati polazeći iz različitih perspektiva, opisivanje ruta pri tom orijentisanju, prepoznavanju i razumijevanju oblika, likova (figura), proporcija i odnos ameđu objektima. Mnoge aktivnosti u prostornoj orijentaciji su primjeri nadležnosti koje se obično očituju čak i prije nego što djeca počnu formalno obrazovanje. Postoje istraživanja (Sophian, 2000) kognitivnih sposobnosti četvoro- i petogodišnjaka koja su pokazala da ta djeca mogu shvatiti proporcije.

Metod(ologija)

U intervjuu / testiranju učestvovalo je 77 studenata treće godine studijskog programa za obrazovanje profesora razredne nastave (učitelja). Podsjećamo čitaoca da su svi studenti osim uspješno okončane srednje škole uspješno položili predmete Matematika 1 i Matematika 2 planirane kurikulumom ovog studijskog programa. Podsjećamo čitaoca, sem toga, da silabusi ova dva predmeta sadrže nastave teme koje pokrivaju neke sadržaje iz geometrije.

U domenama 'Metodika nastave matematike' i 'Istraživane matematičkog obrazovanja' postoji više studija o dizajniranju matematičkih zadataka. Trebalo bi da je matematičar i/ili edukator matematičkih sadržaja u procesu prenosa matematičkih ideja učenicima pri izboru i/ili dizajniranju zadataka za taj prenos potpuno svjestan svojih profesionalnih motiva tog izbora i/ili dizajniranja zadataka. Ovo sugeriše da pri izboru i/ili dizajniranju nekog zadatka posredstvom kojeg namjerava da svoje učenike uputi u neke matematičke ideje matematičar i/ili edukator matematike zna šta bi trebalo da budu povratne informacije pri tom podučavanju i, sem toga, kojim alatima matematičkog mišljenja će njegovi učenici ovladati rješavajući taj zadatak.

[7] Čini se, sagledavajući literaturu o geometrijskom obrazovanju u osnovnoj školi, da mnogi predavači geometrije ne prave razliku između potrebe da se kod učenika osnovne škole razvija shvatanja prostora, s jedne strane, i potreba razvoja nekih elemenata geometrijskog mišljenja, s druge strane.

Zadatak 2 U četvrtom razredu osnovne škole učenike podučavamo geometrijskim pojmovima tačka, prava, poluprava, prava i ravan (stranice 27-32 udžbenika) te pojmu paralelnih (stranica 30 udžbernika) i normalnih pravih (stranice 31-32 udžbenika).

2.1. Kakav međusobni odnos može biti između tačke i prave? Navedi te odnose.

2.2. Prava i tačka izvan nje jednoznačno određuju jednu ravan! Obrazloži ovu tvrdnju.

2.3. Ravan je jednoznačno određena još sa: (a) Tri nekolinearne tačke; (b) Dvije paralelne prave; i (c) Dvije prave koje se sijeku. Obrazloži pojove 'nekolinearne tačke', 'paralelne prave'.

2.4. Opiši pojam 'prave se sijeku'.

2.5. Dvije prave koje se sijeku grade četri ugla. Obrazloži. (a) Šta su 'susjedni uglovi'? (b) Šta su '(na)suprotni uglovi'? (c) Ako su susjedni uglovi podudarni, kakvi su to uglovi? (d) Kakvi du međusobni odnosi ta četri ugla?

2.6. Opiši situaciju u prethodnom pitanju kada su susjedni uglovi podudarni. Kakvi su to uglovi?

2.7. Date su tačka M i prava m. Kako se konstruiše (crta) prava n normalna na pravu m koja sadrži tačku M. Koliko takvih pravih ima?

2.8. Kakva je međusobni odnos dvije prave? Obrazloži svoj odgovor.

2.9. Kakav je međusobni odnos tačke i ravni?

2.10. Kakav je međusobni odnos prave i ravni?

2.11. (Izazov za studente) Kada je prava normalna na ravan? Obrazloži svoj odgovor.

U udžbeniku matematike za IV razred osnovne škole (Dušan Lipovac: *Matematika 4 za četvrti razred osnovne škole*, Zavod za udžbenike i nastavne sredstva, Istočno Sarajevo 2009) piše:

- Zamislite ravnu površ koja nije ograničena. Ona se naziva *ravan*. (stranica 27);
- Ako se duž AB (uz pomoć lenjira) neograničeno produži preko krajnjih tačaka dobija se *prava linija* ili *prava* (stranica 28);
- Dvije prave iste ravni *sijeku se* ako imaju jednu zajedničku tačku (stranica 29);
- Za dvije prave iste ravni kažemo da su *paralelne* ako nemaju zajedničkih tačaka (stranica 29).

Sem toga, na stranicama 31-32 pomenutog udžbenika opisan je pojam *normalne prave* (stranica 31) i opisana procedura (stranica 32) kako se crta normala na pravu koja prolazi kroz unaprijed zadanu tačku. Dalje, na stranicama 78-79 pomenutog udžbenika ponuđena su objašnjenja pravog ugla i kako se crta pravi ugao.

To je ono, što bi učenici četvrtog razreda osnovne škole trebalo da znaju. To su ona znanja koja bi nastavnik trebalo da konstruiše u učionici četvrtog razreda osnovne škole. Slijedeća pitanja se, sada, prirodno pojavljuju:

- *Šta su znanja iz geometrije neophodna realizatorina nastave matematike u čevrtom razredu osnovne škole*?
- *Da li školska znanja iz geometrije, koja su studenti stekli tokom svog ranijeg školovanja u osnovnoj i srednjoj školi, dovoljna da bi se mogla formirati neophodna nastavnička znanja*?
- *Koja su neophodna znanja iz metodike matematike da bi edukator ovih nastavnih sadržaja bio kompetentan u realizaciji pomenutih geometrijskih tema*?
- *Koja su neophodna znanja o razumijevanju interakcije nastavnik-učenik pri primjenjivanju fundamentialnih situacija posredstvom kojih nastavnik nastoji da ove geometrijske ideje prenese učenicima*? i, na kraju,
- *Koja su neophodna znanja o razumjevanju konstruisanja školskih znanja iz ovih geometrijskih sadržaja da bi edukator matematike bio osposobljen da pravilno procjenjuje dosezanje ciljeva nastave matematike pri realizaciji ove teme*?

Rješenje zadatka[8]:

[8] Naravno, rješenja ovog zadatka ne navodimo zbog matematičara i/ili kompetentnih edukatora nastave matematike. Rješenja ovih zadataka smo uvrstili u tekst ovog članka zbog uvjerenja da postoje profesori razredne nastave koji imamju poteškoća sa geometrijom kao i (eventualnih) drugih čitalaca časopisa IMO – ISTRAŽIVANJE MATEMATIČKOG OBRAZOVANJA koji ne uviđaju razliku između školskog matematičkog obrazovanja (kojim bi trebalo da raspolaže svaki svršeni srednjoškolac) i neophodnog matematičkog znanja kojim bi trebalo da raspolažu edukatori nastave matematike.

2.1. Odnos između tačke A i prave p može biti:
(a) Tačka A je incidentna sa pravom p, tj. $A \in p$. U ovom slučaju se kaže da tačka A leži na pravoj.
(b) Tačka A nije incidentna sa pravom p, tj. $\neg(A \in p)$. U ovom slučaju kažemo da tačka A ne leži na pravoj p.

Komentar uz tačku 1: Domen tačaka {A,B,C, ...} i domen parvih {p, q, r, ...} povezani su relacijom *incidencije*. Budući da je *'incidencija između tačke i prave*' predikat dužine dva koji povezuje varijable iz domena tačaka i domena pravih to, prema logičkom principu *'Isključenja trećeg*':

$$\psi \vee \neg\psi \text{ (gdje je } \psi \text{ bilo kakva formula)}$$

moguće je da bude:

ψ : Tačka A i prava p *su incidentni*. (U tom slučaju kažemo da tačka A *leži na* pravoj p, ili da prava p *prolazi* tačkom A.);

$\neg\psi$: Tačka A i prava p *nisu incidentni*. (U tom slučaju kažemo da tačka A *leži izvan* prave p, ili da prava p *prolazi izvan* tačke A.)

2.2. Ravan je jednoznačno određena sa tri nekolinearne tačke. Dakle, neka imamo pravu p i tačku A izvan nje. Budući da je prava p određena sa neke dvije različite tačke, recimo tačke C i D, tada imamo tri nekolinearne tačke A, B i C koje jednoznačno određuju jednu ravan. Prema tome, prava i tačka izvan nje jednoznačno određuju jednu ravan.

Komentar uz tačku 2: Sintagmom „*ravan je jednoznačno određena sa tri nekolinearne tačke*" pokrivena je obostrano – jednoznačna korespodencija između domena ravni i familije koja se sastoji od tročanih skupova nekolinearnih tačaka.

2.3. (a) Za tri ili više tačaka kažemo da su *nekolinearne* ako sve ne leže na istoj pravoj.
(b) Za dvije prave kažemo da su *paralelne* ako leže u istoj ravni i ako nemaju zajedničkih tačaka.

2.4. Za dvije prave kažemo da se *sijeku* ako imaju samo jednu zajedničku tačku. (Tu zajedničku tačku zovemo *presječna tačka*.)

Komentar uz tačke 3-4: Prave (i ravni) tretiramo kao podskupove tačaka. Prema tome, ako su p i q dvije prave tada je, u skladu sa principom isključenja trećeg, moguće:

$$p \equiv q \;\; \vee \;\; \neg(p \equiv q).$$

U prvom slučaju kažemo da *prave su podudarne*. U drugom slučaju kad prave nisu poduidarne, opet u skladu sa principom isključenja trećeg, može biti

$$p \cap q = \varnothing \;\vee\; p \cap q \neq \varnothing.$$

Dalje, nezavisno od prethodnog, moguće je:
(i) da obje prave p i q leže u istoj ravni; i
(ii) da obje ravni ne leže u istoj ravni.

Prema tome, imamo slijedeće mogućnosti:
(1) Prave p i q leže u istoj ravni i $p \cap q = \varnothing$. U tom slučaju kažemo da *prave su paralelne*.
(2) Prave p i q ne leže u istoj ravni i $p \cap q = \varnothing$. U tom slučaju kažemo da *prave su mimoilazne*.
(3) Ako je $p \cap q \neq \varnothing$, tada su prave obavezno incidentne sa istom ravni. Dalje, uopšteno govoreći, presjek $p \cap q$ može biti jednočlan, dvočlan, tročlan ili višečlan skup tačaka.

Ako je presjek jednočlan skup, recimo $p \cap q = \{P\}$, u tom slučaju kažemo da *prave se sijeku* i da tačka P je *presječna tačka* pravih p i q. Ako bi presjek pravih p i q bio dvočlan ili višečlan skup tačaka imali bi $p \equiv q$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom $\neg(p \equiv q)$. Prema tome, presjek nepodudarnih pravih možer biti ili prazan ili jednočlan skup.

2.5. Neka se dvije prave sijeku. One grade četri ugla. Ta četri ugla imaju zajedničko tjeme.

(a) Za dva ugla kažemo da su *naporedni* / *susjedni uglovi* ako imaju jedan zajednički krak.
(b) Za dva ugla kažemo da su *nasuprotni uglovi* ako imaju samo zajedničko tjeme (i kraci ugla su im komplementarne poluprave respektivno).
(c) Naporedni / susjedni uglovi su suplementni, tj. zajedno čine opružen ugao

2.6. Ako su dva naporedna / susjedna ugla podudarna, tada za svakog od njih kažemo da je *prav ugao*.

Komentar uz tačku 2.6: U pomenutom udžbeniku pojam *pravog ugla* uvodi se podudarnošću ugla sa fizičkim etalonom pravog ugla u slijedećem smislu: Ugao je *prav ugao* ako je podudaran sa etalonom pravog ugla (pravim uglom nekog trougla). Ova znanja su na nivou tzv. fizičke geometrije (koju nazivamo 'Geometrija I'). To su znanja koja bi trebalo konstruisati u učionici četvrtog razreda osnovne škole. Znanja o pravom uglu kojim bi trebalo da raspolažu edukatori nastave matematike na nivou tzv. prirodne aksiomatske geometrije (koju nazivamo 'Geometrija II') data su u odgovoru na pitanje 2.6.

Ako su dva susjedna ugla podudarna, tada za svakog od njih kažemo da je *prav ugao*.

Dakle, pojmu '*prav ugao*' prethodi pojmovi: 'susjedni uglovi' i 'podudarnost uglova'.

2.7. Neka je zadana prava m i tačka M. Postoji jedna i samo jedna (normalna) prava koja sadrži tačku M a sa pravom m gradi prave uglove. Crtež modela ove geometrijske situacije crta se pomoću dva trougla / trokuta (ili jednog lenjira i jednog trougla). Konstrukcija prave n koja sadrži tačku M a normalna je na pravu m izvodi se pomoću tri kružnice (na primjer, na sljedeći način)

(i) Konstruišemo kružnicu K(M,r) sa centrom u tački M i poluprečnikom r tako da ta kružnica presjeca pravu m u dvije različite tačke. Neka su to tačke A i B.
(ii) U tačkama A i B konstruišemo kružnice K(A,s) i K(B,s) sa istim poluprečnikom većim od (polovine) duži AB.
(iii) Prethodne dvije kružnice sijeku se u dvije tačke. Neka su to tačke C i D. Prava određena tim tačkama je normalna na pravu m i sadrži tačku M.
(iv) Dokaz prethodne tvrdnje ...

2.8. Odnos dvije prave može biti: (1) Dvije prave su podudarne. (2) Dvije prave su paralelne, (3) Dvije prave se sijeku. (4) Dvije prave su mimoilazna.

Komentar uz tačku 2.8: Kako jer već pomenuto u komentaru uz tačke 3-4, dvije prave p i q su *podudarne* ili *nisu podudarne*. Ako prave nisu podudarne, tada njihov presjek može biti najviše jednočlan skup. Zaista, jer ako je presjek $p \cap q$ dvočlan (ili višečlan) skup, tada mora biti $p \equiv q$ što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je $\neg(p \equiv q)$. Kao što se vidi, dokaz je izveden kontradikcijom. Sublimirajući ova razmatranja i komentare uz tačku 4, zaključujemo da su dvije prave p i q *međusobno incidentne* ako je $p \cap q \neq \emptyset$, odnosno prave p i q *nisu međusobno incidentne* ako je $p \cap q = \emptyset$.

2.9. Odnos tačke i ravni je sljedeći: (1) Tačka je incidentna sa ravni. U tom slučaju kažemo da tačka *leži u ravni*. (2) Tačka nije incidentna sa ravni. U tom slučaju kažemo da tačke *ne leži u ravni*.

Komentar uz tačku 9: *'Incidencija između domena tačaka i domena ravni'* je predikat dužine dva koji povezuje varijable domena tačaka i varijable domena ravni. Kao i u pitanju 2.1. moguće je samo slijedeći odnos:

Tačka A i ravan α su incidentne. U tom slučaju kažemo da tačka A *leži u* ravni α, ili da ravan α *prolazi* tačkom A.

Tačka A i ravan α nisu incidentne. U tom slučaju kažemo da tačka A *ne leži* u ravni α, ili da ravan α *ne prolazi* tačkom A.

2.10. Prava i ravan mogu da:

(a) budu incidentni, tj. da *imaju neprazan presjek*, ili (b) ne dudu incidentni, tj. da *imaju prazan presjek*.

(1) Neka prava i ravan imamju samo jednu zajeničku tačku. Tada kažemo da prava *probada* ravan. Tu zajedničku tačku nazivamo *probodište* prave kroz ravan.

(2) Prava i ravan imaju dvije ili više zajedničkih tačaka. Tada su sve tačke prave istovremeno i tačke ravni. U tom slučaju kažemo da prava *leži* u ravni.
(3) Ako prava i ravan nemaju ni jednu zajedničku tačku, tada kažemo da prava i ravan *su paralelne*.
.
Komentar uz tačku 10: Prave i ravni tretiramo kao podskupove tačaka. Prema tome, odnos između prave p i ravni α može, u skladu sa principom isključenja trećeg, biti:

$$p \cap \alpha = \varnothing \ \vee \ p \cap \alpha \neq \varnothing \ .$$

U prvom slučaju kažemo da *prava je paralelna sa ravni* α. U drugom slučaju presjek $p \cap \alpha$ može biti jednočlan ili višečlan skup tačaka. Ako je $p \cap \alpha = \{P\}$, tj. ako je presjek prave i ravni samo jedna tačka u tom slučaju kažemo da *prava probada ravan* u tački P (i da je tačka P *probodište* prave kroz ravan). Ako je presjek $p \cap \alpha$ dvo- ili višečlani skup tačaka, tada sve tačke prave p leže u ravni α. U tom slučaju kažemo da prava p *leži u ravni* α, ili da ravan α *sadrži* ili *prolazi* pravom p.

Rezultati testiranja/intervijuisanja

Student / Pitanja	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**Σ**
1	1.5	0	2.5	1.5	0.5			1.5	1.5	0.5		**9.5**
2	0			0.5	0		0	0		0		**0.5**
3		0										**0**
4				0								**0**
5												**0**
6												**0**
7												**0**
8	2.5			0	0.5				2	0.5	0	**5.5**
9												**0**
10												**0**
11												**0**
12												**0**
13					0							**0**
14												**0**
15												**0**
16												**0**
17												**0**
18												**0**
19												**0**
20												**0**
21												**0**
22												**0**
23		2										**2**
24												**0**
25												**0**
26												**0**
27			1.5	1.5	1			2	2.5	2	0	**10.5**
28	2											**2**
29	0	0	0	0	0		0	0	0	0		**0**
30	2				0							**2**
31				2								**0**
32												**0**
33												**0**
34												**0**
35												**0**
36												**0**
37												**0**
38												**0**
39												**0**
40												**0**
41	2.5		1.5	2	2	0	0	1.5	0	1.5	0	**11**
42	0		1.5	2.5	2.5			2.5		2.5		**11.5**
43	2.5		0	2.5	0	0	1.5	1.5	2.5	2		**14.5**

44	0	2.5	1.5	2.5	2		2	2.5				**13**
45	2.5	1.5	2	2.5	2.5	2.5	1.5	2.5	2.5	2.5	0	**22.5**
46		2	1.5	2.5			0.5	2.5				**9**
47	2.5		0	2.5	0			0.5	2	0	0	**7.5**
48	2.5	0	0	2	0	0	0	2	2	1.5		**10**
49	2.5	0	1.5	2	2	2	1.5	2.5	2.5	2.5	0	**19**
50	2	0	0	2	2.5	2.5	0	2.5	2.5	2.5	0	**16.5**
51				2.5				2.5				**5**
52	2.5	0.5	1.5	2.5		2.5	2.5	2	2.5			**16.5**
53	2.5		0									**2.5**
54	2.5	0	2	2.5	1	0	1	2	2	1.5		**14.50**
55	2.5		1.5	2.5	1		0	2	2.5			**12**
56		2.5	2.5	2.5	1	1.5		2	0	0		**12**
57	0	2.5	2.5	2.5	2	0.5		2	0	0		**12**
58		2.5	1.5	2.5	0.5			2.5		0		**9.5**
59	2	0	0	2.5	1	0	0	1.5	2	2.5		**11.5**
60												**0**
61												**0**
62												**0**
63	2	0	0	0	1.5			1	2.5	2.5	0	**9.5**
64	2		0	2	1		1	0.5				**6.5**
65	2.5	2.5	2.5	2.5	2	2.5	1.5	1.5	2.5	2.5	2.5	**25**
66	2			2.5	0		0	2.5	2.5			**9.5**
67	2			2								**4**
68	2.5	0	2.5	2.5	0		0	1.5	2.5	1.5	0	**13**
69				2.5	1.5							**4**
70	2		1.5		2	0	1.5	2	0	0		**9**
71	2		1.5	2.5	1.5		0.5	1.5	2.5	1.5	0	**11.5**
72			0	2.5	1.5		0					**4**
73												**0**
74			0	0	1.5	2.5	2	1.5				**7.5**
75		0	1	2.5	1.5	0		1.5	1.5	2.5	0	**9.5**
76	2.5		1.5	1.5	0	0	1.5	2	2.5	0		**11.5**
77	2.5	0	1.5	2.5	1.5		0	0.5	1.5	2.5	0	**12.5**
Ukupno	**59**	**18.5**	**37**	**73**	**37.5**	**16.5**	**17.5**	**51**	**47**	**35**	**2.5**	**377**
Aritmetička sredina	**0.77**	**0.24**	**0.48**	**0.95**	**0.49**	**0.21**	**0.23**	**0.66**	**0.61**	**0.47**	**0.32**	**4.90**

Raspon bodova	0 → 5	5 → 10	10 → 15	15 → 20	20 → 25
broj studenata	45	12	15	4	1

Pitanje / Vrednovanje	∅	0	0.5	1	1.5	2	2.5
1	47	5	0	0	1	9	15
2	57	12	1	0	1	1	5
3	48	10	0	1	13	0	5
4	39	5	1	0	3	7	22
5	41	10	3	6	7	6	3
6	61	8	1	0	1	1	5
7	53	11	2	2	6	2	1
8	45	2	3	1	8	9	9
9	51	5	0	0	3	5	13
10	51	8	2	0	5	2	9
11	64	12	0	0	0	0	1

Povratne informacije

Izbor pitanja u zadatku i analiza studentskih produkcija temelji se na jednom od teorijskih okvira. Ovaj okvir sadrži epistemološku dimenziju koja se temelji na geometrijskoj paradigmi: postoje različita značenja riječi "geometrija" koja stvara različitosti u geometrijskih pristupa. Ovo stvara niz prepreka i izvor je mnogih didaktičkih nesporazuma. Okvir je izrađen na bazi kognitivnog gledišta koje nam omogućava argumentovano opisivanje studentskih nivoa razumijevanja.

Različiti pristupi školi geometrije, tokom obaveznog osnovnog i srednjeg obrazovanja, nude učenicima nekoliko "matematičkih svjetova". Osnovna karakteristika tih svjetova je izrada apstrakcije koje su blizu stvarnosti. Dakle, geometrijski lik je potpuno određen svojom definicijom, a crtež je osnova za definiranje. To djelomično objašnjava zašto studenti imaju znatno mnogo poteškoća u razumijevanju geometrije.

Ovdje ističemo:

- **prirodna geometrija** (geometrija I), što je stvarnost i svijet za izvor valjanosti. U ovoj geometriji, tvrdnja je opravdana pomoću argumenata na temelju eksperimenta i izvoda. Zbrka između modela i stvarnosti se pojavljuje i svi su argumenti dozvoljeni da bi se tvrdnja opravdala.

- **prirodna aksiomatska geometrija**, čiji prototip je klasična Euklidova geometrija. Ta geometrija (geometrija II) je izgrađena na jednom modelu blizu stvarnosti. Demonstracije moraju biti unutar sistema aksioma da bi bile valjane. Znanja na nivou Geometrije II bi trebalo da budu referenca edukatora nastave matematike u nižim i višim razredima osnovne škole.

- **formalno Aksiomatska geometrija** (geometrija III) koja je malo prisutna u obveznom školovanju, ali što bi implicitno trebalo da bude referenca matematičara-nastavnika. Oni su obično, matematičari koji su studirali matematiku na univerzitetu, što je jako pod utjecajem ovog formalnog i logičkog pristupa.

Ovi različiti pristupi (i to je jedna originalnost našeg gledišta) se ne rangiraju: horizonti su različiti i tako se mijenjaju priroda i rukovanje problemima.

Prva analiza učeničkih odgovora i reakcije na zadatke koje smo im dali pokazuje da osim paradigme je također potrebno razmotriti razine argumentacije, opisati preciznije studentska geometrijska razmišljanja. Dakle, sve studentske produkcije analiziramo zahvaljujući dvostrukom pristupu, koji uključuje geometrijske paradigme i razine argumentacije.

Istaknimo neke karakteristične podatke u vezi sa ovim intervjuom /testiranjem studenata:

Neka specifična mjesta razumijevanja geometrijskih odnosa:

1. Na prvo pitanje (Pitanje 2.1) „*Kakav je odnos između tačke i prave*?“ neki od odgovora koje su dali studenti su slijedeći:

„*Tačka može da leži na pravoj, da bude van prave, i da joj ne pripada*.“

„*Tačka stoji izvan prave, tačka je na pravoj*.“

„*Tačka može da bude na pravoj i iznad prave*“

„*Tačka i prava mogu da se sijeku*.“

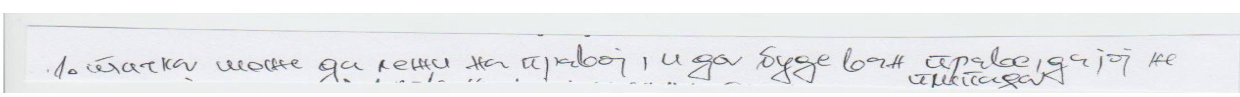
„*Prava može da leži u toj pravoj i da nemaju dodirnih tačaka*.“

„*Tačka i prava se međusobno spajaju*.“

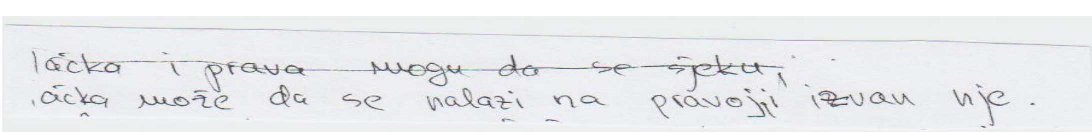
„*Odnos između tačke i prave može biti: (a) da tačka leži nad pravom; (b) da prava prolazi kroz tačku; i (c) da je tačka izvan prave.*“

„ *Kroz tačku možemo povući bezboroj pravih, tj. linija, dok pravu označava samo jedna linija čiji početak čini tačka.*“

„*Tačka leži na pravoj to znači da jedna tačka može da leži na pravoj i da bude iznad nje*.“



Slika 1: Primjer odgovora na pitanje 2.1.



Slika 2: Primjer odgovora na pitanje 2.1.
(Linija koje precrtava gornju rečenicu je nastavnička intervencija)

2. Pogledajmo šta su studenti odgovarali na pitanje 6. Ispravan odgovor na ovo pitanje, uz zadovoljavajuću argumerntaciju, nam sugeriše da studentska znanja o pojmu pravog ugla ne prevazilaze znanja koja, prema van Hieleovoj klasifikaciji, procjenjujemo kao nivo 1. Na žalost, broj studenata koji nisu ponudili nikakav, ili su ponuduili pogrešan, odgovor na ovo pitanje je vrlo visok – 69 (od 77 studenata).

3. Neki od karakterističnih odgovora na deveto pitanje (Pitanje 2.9) „*Kakav je međusobni odnos tačke i ravni*?“ koje su studenti su:

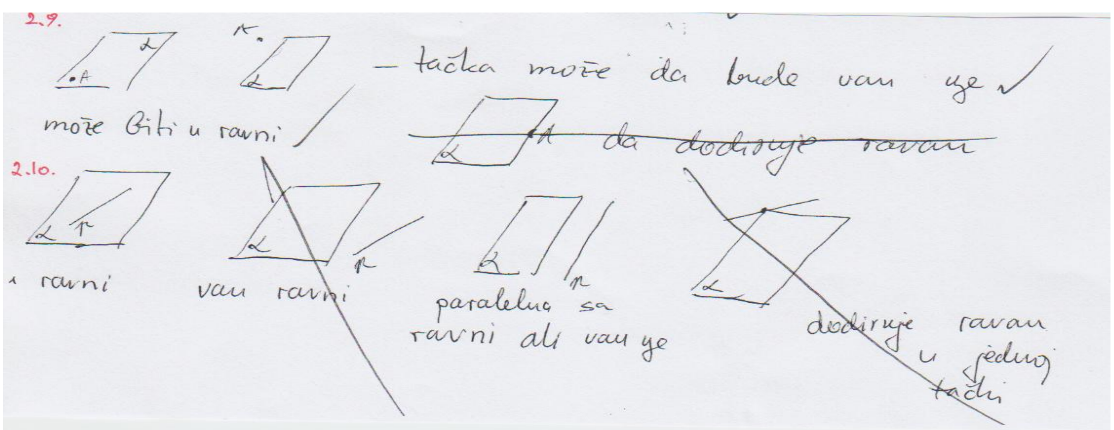
„ *Tačka može da bude unutar ravni, nad ili ispod ravni i izvan ravni*“
„*Tri nekolinearne tačke čine jednu ravan*.“
„*Tačka može biti u ravni, može biti van ravni, i može biti na ravni*.“
„*Tačka može da bude unutar ravni, na njoj ili van nje*.“
„*Tačka može da bude van ravni, može da bude u ravni, i može da dodiruje ravan*.“
„*Tačka može da bude u ravni, izvan ravni i na ravni*.“
„*Jedna ravan se sastojo od dvije ili više tačaka*.“
„*Odnos tačke i ravni je normalan, odnosno ravan je normalna u odnosu na tačku*“

Analizirajući odgovore koje je ponudio jedan od studenata na ovo pitanje uz korištenje modela (Slika 3) sasvim opravdano je da zaključimo da geometrijske pojmove i njihove međusobne odnose student dioživlajva kao fizičke objekte i, prema tome, odnose tumači pozivajući se na vizuelizaciju tih fizičkih objekata. Za njega, dedukujemo, pojmovi prave i ravni uopšte nisu apstrakcije. Na primjer, za njega „tačka A dodiruje ravan α“ tako što se nalazi na jednoj od stranica četvorougla - modela ravni.

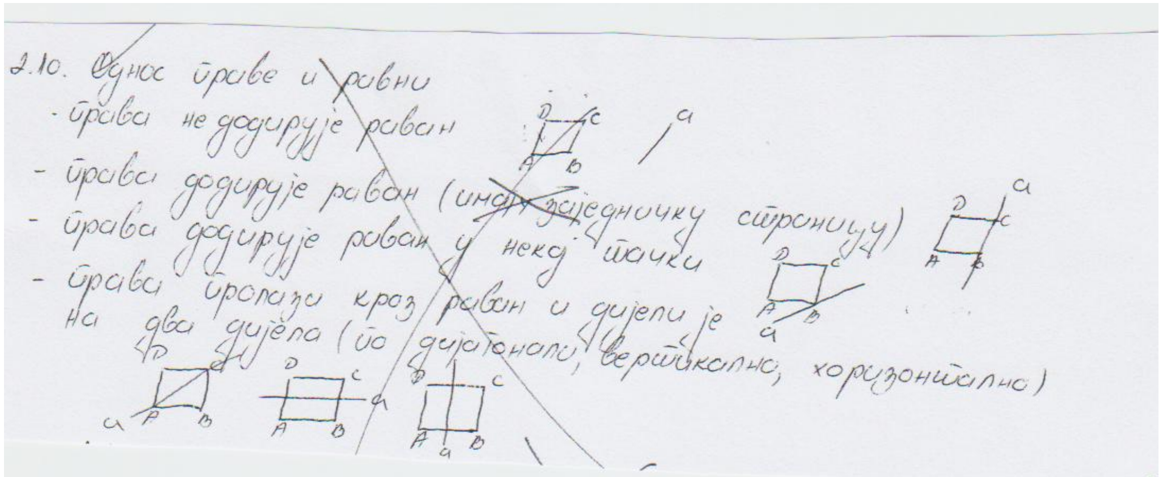
4. Deset pitanje (Pitanje 2.10) je glasilo „*Kakav je međusobni odnos prave i ravni*?“ Neki karakteristični odgovori koje su studenti ponudili su slijedeći:

„*Prava može biti u ravni, van ravni, paralelna sa ravni ali van nje, da je dodiruje*.“
„*Dvije prave čine ravan*.“
„*Prava je označena sa dvije tačke, dok ravan sadrži samo jednu tačku*.“
„*Odnos prave i ravni:*

- *prava ne dodiruje ravan;*
- *prava dodiruje ravan (imaju zajedničku stranicu);*
- *prava dodiruje ravan u nekoj tački;*
- *prava prolazi kroz ravan i dijeli je na dva dijela (po dijagobnali; vertikalno; horizontalno)*.“



Slika 3: Primjeri odgovora na pitanja 2.9. i 2.10.
(Linije koje precrtavaju neke slučajeve su nastavnička intervencija)



Slika 4: Primjer odgovora na pitanje 2.10. (velika slova X su nastavnička intervencija)

Posmatrajući crteže koje su ponudili studenti na Slici 2 (2.10) i Slici 3 kao odgovore na pitanje o međusobnom odnosu prave i ravni zaključujemo da za ove studente pojmovi prave i ravni uopšte nisu apstrakcije već da su to fizički realiteti te da njihove međusobne odnose posmatra kao odnose krutih tijela.

Zaključne refleksije

U osnovnim školama podučavanje geometrije često je suženo na učenje kulturološkog vokabulara u odnosu na neke objekte okružijućeg svemira, neke ravne površine i neke osnovne objekte i/ili odnose kao što su tačke, prave, segmenti, paralelne ili okomite prave uz korištenje uobičajenih instrumenata za crtanje figura. U osnovnoj školi, učitelji uobičajeno smatraju geometriju manje važnom u odnosu na brojeve. Dio problema, vjerovatno, leži u tome da u numeričkom polju postoje mnogi objekti i/ili dokumenti dizajnirani za učitelje. S druge strane, podučavanje geometrije počiva na pokazivanju: geometrijski objekti su prikazani, učenici ih moraju prepoznati, ali oni se rijetko koriste za rješavanje problema (Gobert 2001, Marie-Jeanne Perrin-Glorian 2003). Ne postoji dogovor o tome šta bi trebalo predavati iz geometrije u osnovnoj školi. Jedan broj istraživača matematičkog obrazovanja protežira da količina geometrijskih sadržaja u osnovnoj školi treba da bude zasnovana na dobro odmjerenom odnosu između praktične i teorijske geometrije. U vezi sa prethodnim pogledati, na primjer, članak [15]. Mnogi učitelji, kada su oni išli u osnovnu i srednju školu, sami su imali poteškoće sa geometrijom, posebno u srednjoj školi, te zbog toga njihova (samo)uvjerenost o svojim geometrijskim kompetencijama su na nedovoljno visokom nivou. Ustanovljeno je da je učitelj manje siguran kada on (ili ona) podučava svoje učenike konstektualne zadatke iz ove oblasti matematike. Što se više inicijative ostavlja učenicima to se pred učitelja mogu pojavljivati neočekivane situacije u kojima se ne snalazi baš najbolje. To je jedan od razloga zbog kojih se mora insistirati na značajnim kompetencijama učitelja u razumjevanju geometrije.

Odnos učenika nižih razreda osnovne škole prema geometrijskim figurama i geometrijskim tijelima je glavna tačka u njihovom odnosu prema geometriji i potrebno je da učitelj pri podučavanju geometrijskim sadržajima insistira da se učenici osposobe da spajaju i povezuju (i razgovjetno izgovaraju) geometrijske pojmove te da ih iz matematičkog jezika bez većih poteškoća prevode u kolokvijalni svakodnevni jezik i komunikaciju. Od prvih razreda osnovne škole pa do prelaska u srednju školu učenici bi trebalo da su osposobljeni da mogu da se prebace iz domena vizije figura kao površina u materijalnoj formi ka viziji figura kao podskupova tačaka, te da razumiju i umiju da ih oblikuju konstrukcijama uz pomoć instrumenata ili bez njih. Ovaj zahtijev predstavlja skok od intuitivnog odnosa prema geometrijskim objektima preko induktivnog poimanja tih objekata do analitičkog odnosa prema tim objektima. U nižim razredima osnovne škole ni u kom slučaju ne treba formirati kod učenika iluziju da prethodni zahtjev ne postoji. Zato je ispravan odnos u podučavanju geometrijskih sadržaja u osnovnoj školi odlučujući moment koji postavlja temelj učenja i uspješnog ovladavanja geometrijskim problemima u srednjoj školi. Rad sa figurama je jedan od temelja tog učenja – rad sa crtežima snažno stimuliše razumijevanje geometrije.

Uprkos značajnom broju istraživanja (publikovanih u poslednjh dvadeset godina) proučavanje uslova pod kojima je izgrađena geometrijska misao u učionici kao i sama priroda geometrijskog znanja i dalje nam je znatno nepoznata. Razlog ovome, najvjerovatnije, leži u poteškoćama definisanja epistemiološkog statusa znanja u okvirima didaktičkog konteksa na prihvatljiv način. Prirodno se postavljaju pitanja:

- *Šta se smatra pod školskim znanjem geometrije*?
- *Šta se smatra pod neophodnim „nastavničkim znajnjem geometrije*? i naravno:
- *Šta mi znamo o neophodnim geometrijskim kompetencijama realizatora nastave matematike na različitim nivoima obrazovanja*?

Ovdje pomenute tri vrste znanja su epistemiološki različite. jedna od glavnih karakteristika tih različitosti je razlika između tri domena znanja koja se odnose na socijalni kontekstte tri vrste znanja u kojem se svaki od tih domena razvija i koji utiče na njihov epistemiološki suštinski status. To sugeriše da epistemiološki status školskog znanja geometrije ne može biti dekukovan iz naučnog matematičkog znanja, ali bi trebalo da se proučava u vezi sa društvenim kontekstima nastave i procesa podučavanja i učenja. Dalje, to znači da se epistemiološki status geometrijskih znanja neophodnih svakom realizatoru nastave matematike znatno razlikuje od prethodno pomenuta dva domena.

Literatura

[1] J. Ainley, L. Bills & K. Wilson: *Designing Task for Purposeful Algebra*; CERME 3 (2003), WG 6, 1-3

[2] N. Bednarz, L. Radford, B. Janvier and A. Lepage: *Aritmetical and algebraic thinking in problem-solving*; PME 16 (1992), Vol. 1, 65-72

[3] Biehler, Scholz, Strässer and Winkelmann (Editors): *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*; MA: Kluwer, Norwell, 1994.

[4] A.J.Bishop: *Spatial abilities and mathematics achievevement*; Educational Studies in mathematics, 11(2000), 257-269

[5] D.Bilbija, J.Milanković, D.A.Romano i N.Runjić: Teorija van Hieleovih o razumjiervanju geometrije; MAT-KOL (Banja Luka), XV(2) (2009), 5-17

[6] D.H.Clements: *Major themesand recommendations*; In: *Engaging young children in mathematics standards for early childhood mathematics* (editors: D.H.Clements and J.Sarama), Mahwah, Lowrence Erlbaum Association, Inc, 2004, 7-75

[7] L. English (editor): *Handbook of International Research in Mathematics Education* (2nd ed.). Routledge, New York and London: 2008.

[8] T.Fujita and K.Jones, *Learners's understanding of the definitions and hierarchal classification of quadrilaterals: towards a theoretical framins*; Research in Mathematics Education, 9(1-2)(2007), 3-20.

[9] Gobert, S. (2001) *Questions de didactique liées aux rapports entre la géométrie et l'espace sensible, dans le cadre de l'enseignement à l'école élémentaire,* Thèse de doctorat, Université Paris 7.

[10] Hershkowitz R., Vinner S : *Children's concepts in elementary geometry : A reflection of teachers' concepts* ? Proceeding of the 8th International conference of PME. Darlinghurst Australia. 1984

[11] J.Huttenlocher, N.Newcombe and E.Sandberg: *The coding of spatial location in young children*; Cognitive Psychology, 27(1994), 115-145

[12] Alain Kuzniak, Jean-Claude Rauscher: *On the geometrical thinking of pre-service school teachers*; CERME 4 (2005), WG 7, 738-747

[13] Marie-Jeanne Perrin-Glorian: *Studying geometrical figures at primary schools*; CERME 3 (2003), TG7, pp.1-10.

[14] M. Марјановић: *Нека разматрања о настави математике*; Настава математике (Београд), XLVIII (1-2)(2003), 10-16

[15] Мирослав Марјановић: *Дидактичка анализа – план за разматрање*; Настава математике (Београд), L (4) (2005), 5-12

[16] M. Марјановић: *Дидактичка анализа почетних геометријских појмова, 1*; Настава математике (Београд), LII (1-2) (2008), 23-31

[17] Niss M : *Dimensions of geometry and assessment*; Perspectives in the teaching of Geometry for the 21st Century Icmi Study Kluwer 1988, pp 263-274

[18] Marie-Jeanne Perrin-Glorian: *Studying geometrical figures at primary schools*; CERME 3 (2003), TG7, pp.1-10.

[19] D.A. Romano: *Istraživanje matematičkog obrazovanja*, IMO, Vol. I(2009), 1-10

[20] D.A.Romano: *Teorija van Hieleovih o učenju geometrije*; Metodički obzori (Pula), Vol. IV (1-2)(2009), No. 7-8, 95-103
[21] D.A. Romano: *O geometrijskom mišljenju*; Nastava matematike (Beograd), LIV (2-3) (2009), 1-11
[22] D.A. Romano: *Jedno utvrđivanje matematičkih kompetencija studenata učiteljskog programa*; Nastava matematike (Beograd), (Pojaviće se)
[23] Sierpinska and J. Kilpatrick (editors): *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (vols. 1 & 2). Kluwer Academic Publishers: Great Britain, 1998.
[24] J.M.Zacks, J.Mires, B.Tversky and E.Hazeltine: *Mental spatial transformations of objects and perspective*. Spatial Cognition and Computation, 2(4)(2000), 315-332.